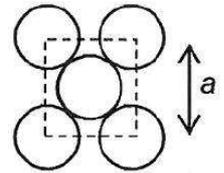


En 1912, Max Von Laue soumet un cristal à des ondes électromagnétiques de courte longueur d'onde, les rayons X. Il découvre ainsi sa structure.

Les solides cristallins présentent au niveau atomique un arrangement parfaitement ordonné et régulier dans trois directions de l'espace. Cet arrangement est caractérisé par la distance  $a$  entre deux entités (atomes, ions, molécules). Cette distance est de l'ordre de 0,1 nm. Les solides cristallins ont la propriété de diffracter une onde de longueur d'onde dont la valeur est voisine de la distance  $a$ .



### 1. Diffraction d'un faisceau d'électrons

Les deux représentations ci-dessous montrent la figure de diffraction d'un faisceau de rayons X (à gauche) et d'un faisceau d'électrons (à droite) après passage au travers d'une fine feuille faite de petits cristaux d'aluminium.

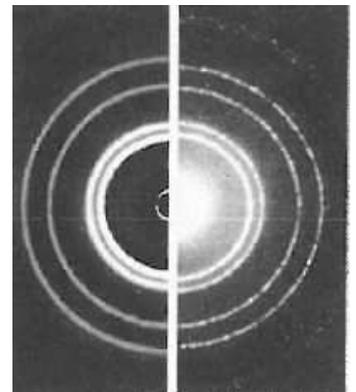


Figure 1

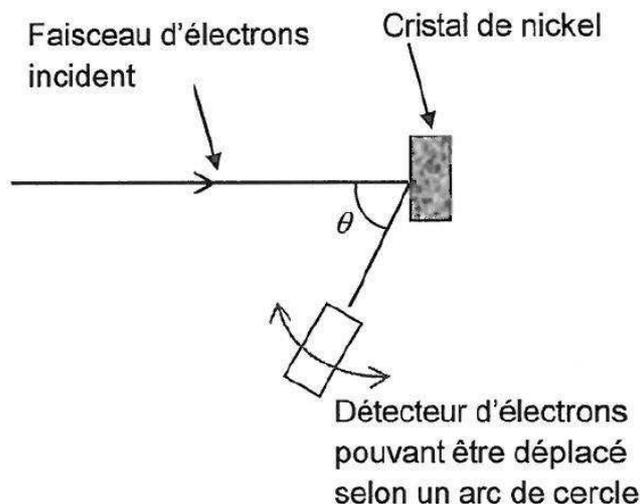
Source : A.P. French and Edwin F. Taylor, *Introduction to Quantum Physics*, New York : W.W.Norton. 1978

- 1.1. Quelle condition sur la longueur d'onde permet d'observer le phénomène de diffraction ?
- 1.2. Expliquer en quoi la figure 1 illustre l'hypothèse d'un comportement ondulatoire des électrons.
- 1.3. Donner la relation de De Broglie qui prend en compte ce comportement ondulatoire des électrons. Quelle est sa signification ?

En 1927, les américains C.J. Davisson et L. Germer apportent la première preuve expérimentale du comportement ondulatoire de particules de masse non nulle.

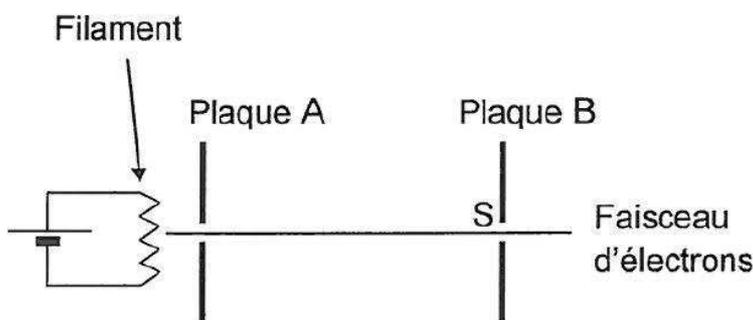
Ils observent ainsi la diffraction d'un faisceau d'électrons de vitesses identiques, par un cristal de nickel.

Le schéma de principe du montage expérimental de Davisson et Germer est représenté ci-contre.



## 2. Obtention du faisceau d'électrons

Dans l'expérience de Davisson-Germer, des électrons émis sans vitesse initiale par un filament sont accélérés par le champ électrostatique horizontal supposé uniforme qui règne entre deux plaques planes verticales A et B aux bornes desquelles on applique une tension électrique de l'ordre de 100 V.



### Données :

- masse d'un électron :  $m = 9,11 \times 10^{-31}$  kg ;
- charge électrique élémentaire :  $e = 1,60 \times 10^{-19}$  C ;
- constante de Planck :  $h = 6,63 \times 10^{-34}$  J.s ;
- la valeur de l'intensité de la pesanteur est supposée connue du candidat ;
- la distance  $d$  entre les plaques est inférieure à 1 m ;
- deux plaques séparées d'une distance  $d$  et aux bornes desquelles on applique une tension

$U$  créent entre elles un champ électrostatique d'intensité  $E = \frac{U}{d}$

- 2.1. Montrer que le poids de l'électron peut être négligé devant la force électrique qu'il subit.
- 2.2. Représenter sur un schéma la force électrique  $\vec{F}$  subie par l'électron entre les plaques et le champ électrostatique  $\vec{E}$ . Justifier cette représentation.
- 2.3. Montrer qu'en sortie S du dispositif, l'expression de la vitesse  $v_s$  d'un électron est :

$$v_s = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Pour ce faire, on pourra déterminer les équations horaires du mouvement d'un électron entre les deux plaques A et B en considérant que sa vitesse est nulle à l'entrée du dispositif.

*Les éléments de la démarche, même partielle, seront valorisés.*

- 2.4. Pour observer la diffraction du faisceau d'électrons par le nickel, la longueur d'onde de l'onde de matière associée doit être de l'ordre de grandeur de la distance  $a$  caractérisant ce solide cristallin, soit environ 0,1 nm.
- 2.4.1. Montrer que dans ce cas l'expression de la tension  $U$  est donnée par :

$$U = \frac{h^2}{2m.e.\lambda^2}$$

- 2.4.2. Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur de la tension  $U$  que Davisson et Germer ont dû choisir pour leur expérience.

### 3. Une application technologique du phénomène : le microscope électronique

S'appuyant sur les résultats de Davisson-Germer, deux chercheurs allemands (E.Ruska et M.Knoll) ont conçu en 1931 un prototype de microscope électronique utilisant un faisceau d'électrons accélérés par une tension  $U$  de l'ordre de 100 kV.



Sachant que la résolution (plus petite distance séparant deux objets que l'on peut distinguer) d'un microscope optique ou électronique est proportionnelle à la longueur d'onde du rayonnement utilisé, expliquer en quelques lignes une raison qui a pu motiver les chercheurs à se lancer dans l'élaboration d'un microscope électronique.

### 1. Diffraction d'un faisceau d'électrons

1.1. La diffraction est nettement observée lorsque la dimension de l'ouverture ou de l'obstacle est du même ordre de grandeur, ou inférieure, à la longueur d'onde.

Remarque : pour la lumière, le phénomène de diffraction est observable même si la dimension de l'ouverture ou de l'obstacle (ex : un cheveu) est 100 fois plus grande que la longueur d'onde.

1.2. On constate sur la figure 1 que le passage des électrons à travers la feuille d'aluminium conduit à une figure de diffraction similaire à celle observée avec des rayons X. Le phénomène de diffraction étant caractéristique des ondes, cette expérience valide l'hypothèse du comportement ondulatoire des électrons.

1.3. La relation de de Broglie traduit la **dualité onde-particule** en associant une longueur d'onde à toute particule (matérielle ou non) selon la relation :

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Quantité de mouvement de la particule (aspect **particulaire**)

Constante de Planck

Longueur d'onde associée à la particule (aspect **ondulatoire**)

### 2. Obtention d'un faisceau d'électrons

2.1. Comparons les ordres de grandeurs du poids  $P$  de l'électron et de la force électrique  $F$  qu'il subit.

$$P = m \cdot g$$

$$P = 9,11 \times 10^{-31} \times 9,8 = 10^{-29} \text{ N}$$

$$F = |q| \cdot E = |-e| \cdot E = \frac{e \cdot U}{d}$$

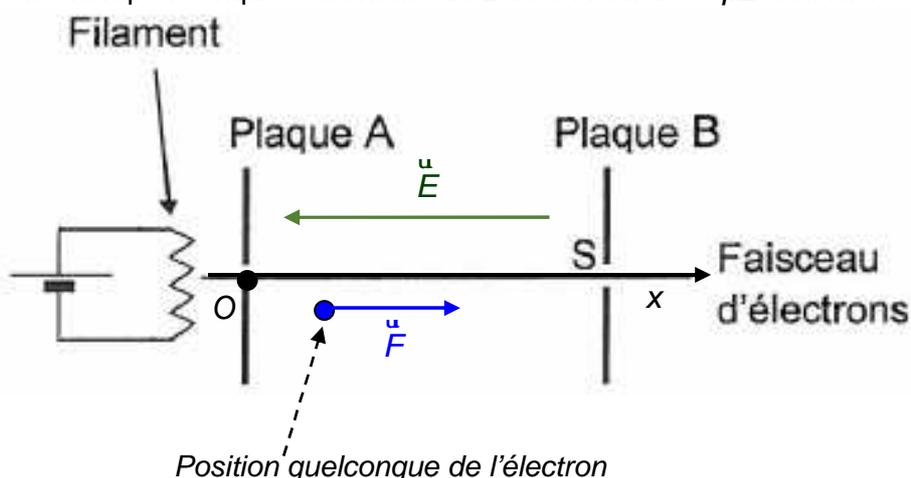
$$F = \frac{1,60 \times 10^{-19} \times 100}{1} = 10^{-17} \text{ N}$$

En comparant les ordres de grandeurs, on constate que  $P = F$  donc le poids de l'électron est bien négligeable devant la force électrique qu'il subit.

Remarque : il est surprenant que le sujet exige du candidat qu'il connaisse la valeur de  $g$  car elle n'est pas exigible.

2.2. L'électron étant accéléré entre la plaque A et la plaque B, la force électrique qu'il subit est forcément orientée de A vers B.

Cela implique que le champ électrique soit orienté de B vers A car  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  soit ici  $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$



2.3. Appliquons la 2<sup>ème</sup> loi de Newton au système {électron} de masse  $m$  constante, dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen :  $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$

$$-e \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{-e \cdot \vec{E}}{m}$$

En projetant sur l'axe horizontal, orienté de A vers B (correspondant à la trajectoire de l'électron) :

$$a_x = \frac{-e \cdot E_x}{m} = \frac{-e \cdot (-E)}{m} = \frac{e \cdot E}{m} \quad (E_x = -E \text{ car } \vec{E} \text{ orienté vers la gauche})$$

Par définition,  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  donc  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

En intégrant :  $v_x = \frac{e \cdot E}{m} \cdot t + C_1$  or d'après les conditions initiales à  $t = 0$ ,  $v_x(0) = 0$  donc  $C_1 = 0$ .

Ainsi  $v_x = \frac{e \cdot E}{m} \cdot t$  (1) Par définition,  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$  donc  $v_x = \frac{dx}{dt}$ .

En intégrant :  $x = \frac{e \cdot E}{2m} \cdot t^2 + C_2$  or à  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$  donc  $C_2 = 0$ . Ainsi :  $x = \frac{e \cdot E}{2m} \cdot t^2$  (2)

Démarche : grâce à (2) on peut maintenant exprimer la date  $t_s$  à laquelle l'électron arrive en S puis en déduire la vitesse à cette date grâce à (1).

(2) donne  $x_s = d = \frac{e \cdot E}{2m} \cdot t_s^2$  donc  $t_s = \sqrt{\frac{2m \cdot d}{e \cdot E}}$  (calcul inutile)

Dans (1) :  $v_x = \frac{e \cdot E}{m} \cdot t_s = \frac{e \cdot E}{m} \cdot \sqrt{\frac{2m \cdot d}{e \cdot E}} = \sqrt{\frac{e^2 \cdot E^2}{m^2} \cdot \frac{2m \cdot d}{e \cdot E}} = \sqrt{\frac{2e \cdot E \cdot d}{m}} = \sqrt{\frac{2e \cdot \frac{U}{d} \cdot d}{m}} = \sqrt{\frac{2e \cdot U}{m}}$

Par définition,  $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x^2} = +v_x$  donc  $v_s = \sqrt{\frac{2e \cdot U}{m}}$ .

2.4.1. En appliquant la relation de de Broglie à l'électron au point S :  $p_s = \frac{h}{\lambda}$  donc  $m \cdot v_s = \frac{h}{\lambda}$

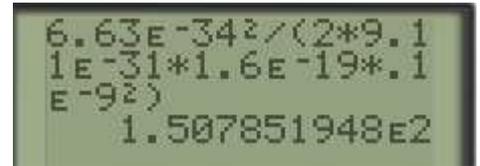
En remplaçant  $v_s$  par l'expression établie au 2.3. :  $m \cdot \sqrt{\frac{2e \cdot U}{m}} = \frac{h}{\lambda}$   $\sqrt{2m \cdot e \cdot U} = \frac{h}{\lambda}$

En élevant au carré  $2m \cdot e \cdot U = \frac{h^2}{\lambda^2}$   $U = \frac{h^2}{2m \cdot e \cdot \lambda^2}$

**La preuve que l'exo est vache.**

**2.4.2.** En prenant  $\lambda = 0,1 \text{ nm} = 0,1 \times 10^{-9} \text{ m}$  conformément à l'énoncé :

$$U = \frac{(6,63 \times 10^{-34})^2}{2 \times 9,11 \times 10^{-31} \times 1,60 \times 10^{-19} \times (0,1 \times 10^{-9})^2} = 1,5 \times 10^2 \text{ V}$$



6.63E-34^2/(2\*9.1  
1E-31\*1.6E-19\*.1  
E-9^2)  
1.507851948E2

Soit un ordre de grandeur de  $10^2 \text{ V}$ .

Ce résultat est bien conforme à l'énoncé qui indique « de l'ordre de  $100 \text{ V}$  ».

### **3. Une application technologique du phénomène : le microscope électronique**

La résolution d'un microscope est proportionnelle à la longueur d'onde utilisée.

Pour un microscope optique, l'ordre de grandeur de la longueur d'onde moyenne du visible est de  $10^3 \text{ nm}$ .

Pour le microscope électronique, la longueur d'onde des électrons est bien plus faible, de l'ordre de  $0,1 \text{ nm}$  dans cet exercice.

Les chercheurs ont compris qu'avec un microscope électronique, on pourrait atteindre une résolution  $10^4$  fois plus petite qu'avec un microscope optique.

Les rayons X, découverts en 1895 par le physicien allemand Wilhelm Röntgen, sont des rayonnements électromagnétiques utilisés principalement en imagerie médicale (radiologie) et en cristallographie (étude des substances cristallines).

L'objectif de cet exercice est d'étudier la production des rayons X et leur utilisation dans l'analyse de la structure des cristaux.

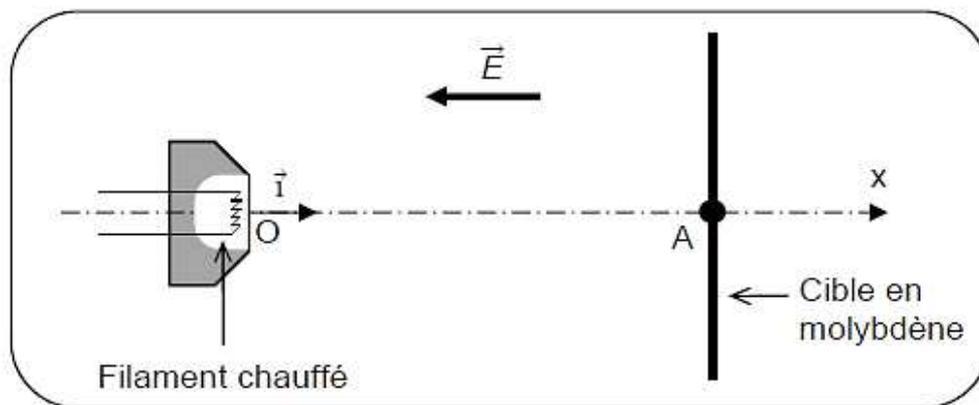
### 1. Accélération d'un faisceau d'électrons

Les rayons X sont produits dans des dispositifs appelés *tubes de Coolidge* (W.D.COOLIDGE, physicien américain, 1873 -1975).

Dans ce dispositif, des électrons émis par un filament chauffé par effet Joule, sont accélérés sous l'effet d'un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ . Ce champ est créé par une tension électrique  $U$  d'environ 100 kV.

Les électrons se dirigent vers une cible de molybdène, métal de symbole Mo, avec laquelle ils interagissent pour produire les rayons X. Se déplaçant à une vitesse très élevée, ces électrons peuvent acquérir une énergie cinétique suffisante pour perturber les couches électroniques internes des atomes de la cible. Ces atomes, dans un état excité, vont alors émettre des rayons X en retournant à leur état fondamental.

La figure 1 ci-dessous reprend de manière simplifiée le principe du tube de Coolidge.



**Figure 1**

#### Données :

- entre le filament et la cible, séparées d'une distance  $OA = L = 2 \text{ cm}$ , règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  dont la valeur est donnée par la relation :  $E = \frac{U}{L}$  ;
- célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  ;
- charge électrique élémentaire :  $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$  ;
- masse de l'électron :  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  ;
- intensité de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$  ;
- durée propre et durée mesurée dans le référentiel d'étude :

Si le référentiel d'étude est galiléen et si le référentiel propre est en mouvement à vitesse constante par rapport à lui, alors la durée mesurée dans le référentiel d'étude vaut :

$$\Delta t_m = \gamma \cdot \Delta t_p \quad \left| \begin{array}{l} \Delta t_p : \text{durée propre entre les deux événements considérés} \\ \Delta t_m : \text{durée mesurée dans le référentiel d'étude supposé galiléen} \end{array} \right.$$

$\gamma$  est appelé coefficient de Lorentz et s'écrit :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \left| \begin{array}{l} v : \text{vitesse du référentiel propre par rapport au référentiel d'étude} \\ c : \text{vitesse de la lumière dans le vide} \end{array} \right.$$

On se propose d'évaluer l'ordre de grandeur de la vitesse atteinte par les électrons lorsqu'ils arrivent sur la cible en molybdène.

On suppose pour cela qu'un électron est émis au point O avec une vitesse nulle à  $t = 0$  s. Il arrive au point A avec une vitesse  $\vec{v}$ .

On considère qu'il est soumis à la force électrique  $\vec{F}_e$ .

**1.1** Donner l'expression vectorielle de la force électrique  $\vec{F}_e$  subie par un électron.  
Comparer la direction et le sens de la force électrique  $\vec{F}_e$  à ceux du champ électrique  $\vec{E}$ .

**1.2** Montrer que dans le cas où la tension électrique  $U$  appliquée entre le filament et la cible vaut 100 kV, on peut négliger le poids de l'électron devant la force électrique.

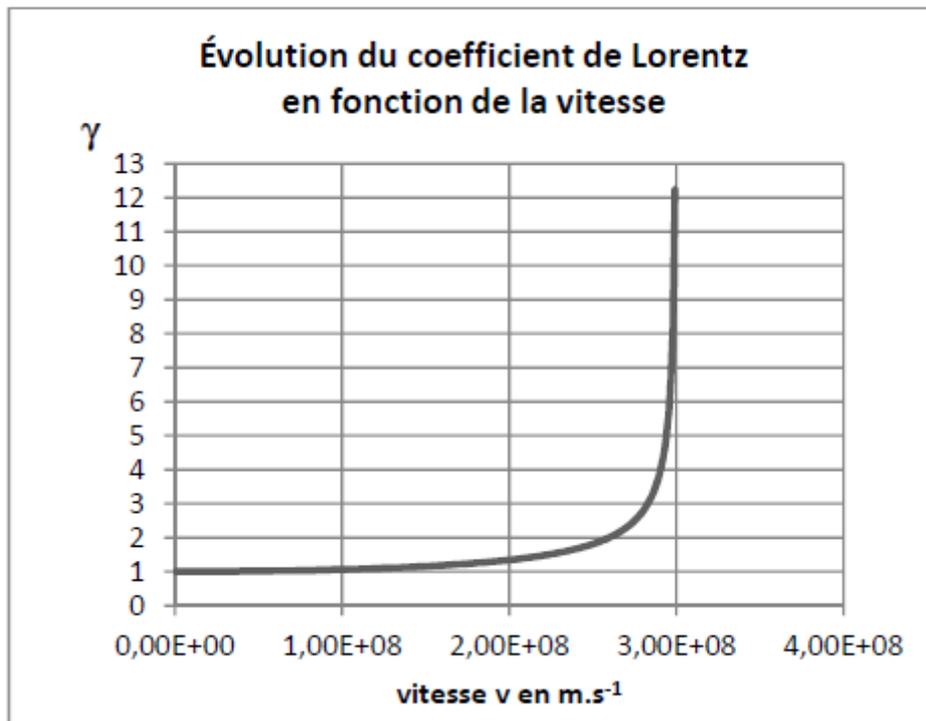
**1.3** Montrer que l'expression de la vitesse de l'électron lorsqu'il arrive au point A est :

$$v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

*Tout élément de la démarche sera valorisé, même si celle-ci n'aboutit pas.*

**1.4** Calculer la vitesse de l'électron lorsqu'il arrive au point A dans le cas où la tension électrique  $U$  appliquée entre le filament et la cible vaut 100 kV.

**1.5** Un graphe représentant l'évolution du coefficient de Lorentz en fonction de la vitesse est fourni ci-dessous. Pensez-vous qu'un modèle relativiste conviendrait mieux à l'étude mécanique du mouvement de l'électron ? Justifier votre réponse.

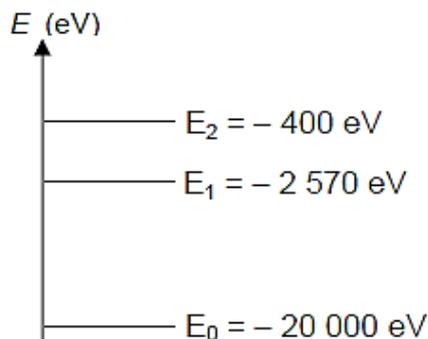


## 2. Émission de rayons X

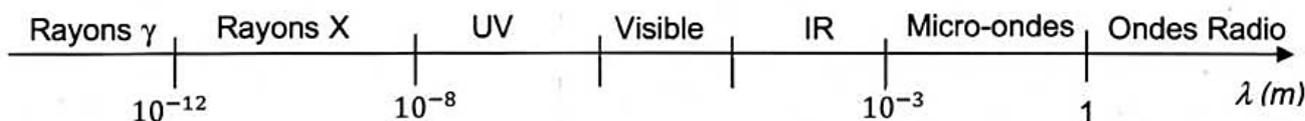
Si l'électron libéré par le filament a une énergie suffisante lorsqu'il arrive sur la cible en molybdène, il peut exciter certains atomes de la cible en perturbant leurs couches électroniques internes. Ces atomes excités émettent des rayons X en revenant à leur état fondamental.

### Données :

- constante de Planck :  $h = 6,63 \times 10^{-34}$  J.s ;
- $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$  J ;
- diagramme simplifié des niveaux d'énergie du molybdène :



- spectre des ondes électromagnétiques (échelle non respectée) :



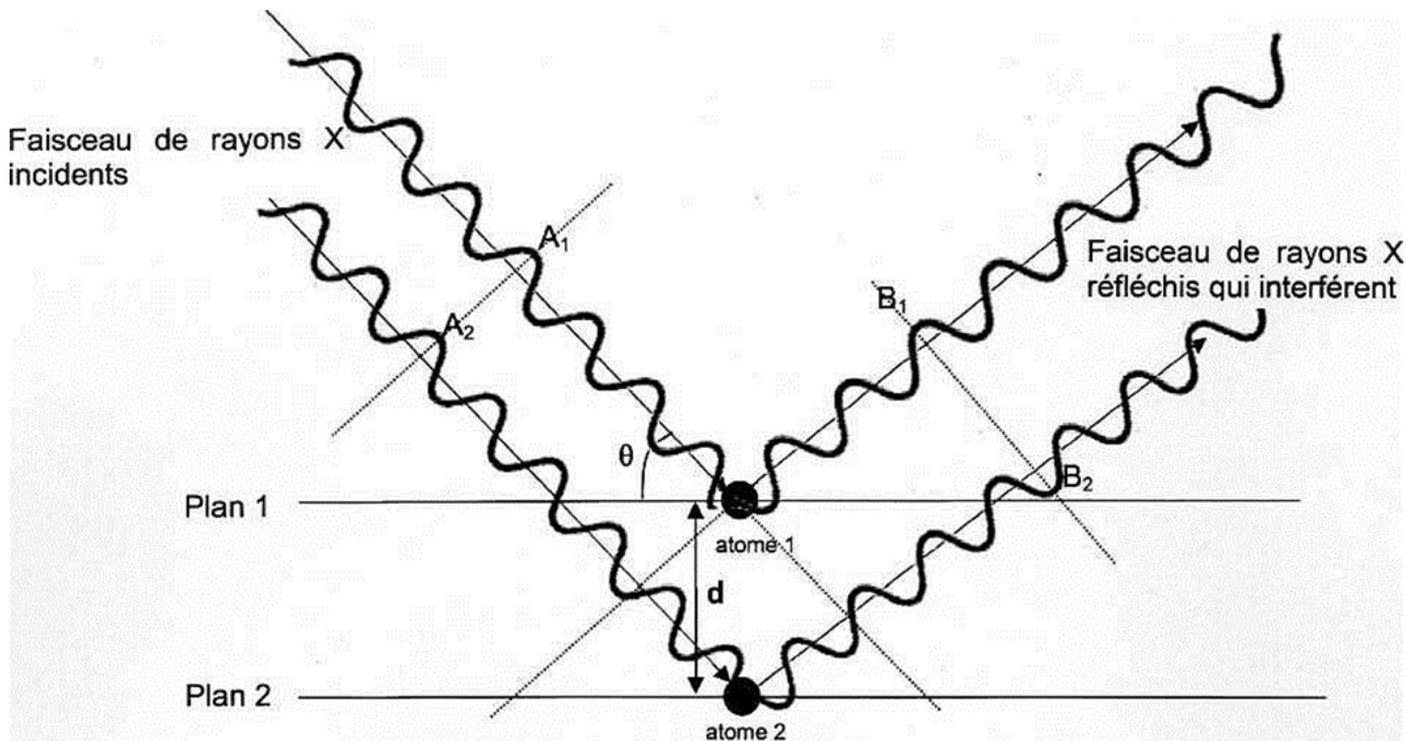
**2.1** Reproduire sur votre copie le diagramme d'énergie du molybdène, et y représenter par des flèches toutes les transitions électroniques de l'atome pouvant s'accompagner de l'émission d'un rayonnement.

**2.2** Déterminer le domaine des ondes émises correspondant à ces transitions.

### 3. Application à l'étude des structures cristallines

Les rayons X sont utilisés pour explorer la matière et par exemple pour évaluer la distance  $d$  entre deux plans 1 et 2 voisins d'atomes dans un cristal. Lorsqu'on envoie un faisceau de rayons X de longueur d'onde  $\lambda$  sur un cristal, ils sont réfléchis par les atomes qui constituent le cristal. Les ondes réfléchies par les atomes interfèrent.

On peut représenter de façon très simplifiée cette situation par le schéma suivant :



### Données :

- la différence de parcours entre deux ondes incidentes qui se réfléchissent sur deux plans successifs est donnée par la relation :  $\delta = 2 d \cdot \sin \theta$ , où  $d$  est la distance entre deux atomes voisins et  $\theta$  l'angle entre le rayon et le plan.
  - dans le cas d'interférences constructives, la différence de parcours vaut :  $\delta = k \cdot \lambda$
  - dans le cas d'interférences destructives, la différence de parcours vaut :  $\delta = (k + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$
- où  $k$  est un nombre entier positif ou négatif et  $\lambda$  la longueur d'onde des ondes qui interfèrent.

#### 3.1 En exploitant le schéma précédent, préciser :

- Si les deux rayons incidents interfèrent avec les états vibratoires représentés en  $A_1$  et  $A_2$ , on obtient des interférences constructives ou destructives.
- Si les deux rayons réfléchis interfèrent avec les états vibratoires représentés en  $B_1$  et  $B_2$ , on obtient des interférences constructives ou destructives.
- Pourquoi les interférences ne sont pas de même nature entre  $A_1/A_2$  et  $B_1/B_2$ .

#### 3.2 Pour un angle $\theta$ de $10,4^\circ$ et une longueur d'onde de $0,154 \text{ nm}$ , déterminer la valeur de $d$ dans le cristal, dans le cas où l'on obtient des interférences constructives pour une différence de parcours minimale.

## 1. Accélération d'un faisceau d'électrons

$$1.1. \vec{F}_e = q.\vec{E}, \text{ pour un électron } \vec{F}_e = -e.\vec{E}.$$

Ainsi, la force électrique  $\vec{F}_e$  subie par l'électron et le champ électrique  $\vec{E}$  sont de même direction mais de sens opposés.

1.2. Pour montrer que le poids de l'électron est bien négligeable devant la force électrique qu'il

subit, exprimons puis calculons le rapport  $\frac{P}{F_e} : \frac{P}{F_e} = \frac{m.g}{|q|.E} = \frac{m.g}{e.\frac{U}{d}} = \frac{m.g.d}{e.U}$

$$\frac{P}{F_e} = \frac{9,11 \times 10^{-31} \times 9,81 \times 2 \times 10^{-2}}{1,60 \times 10^{-19} \times 100 \times 10^3} = 1 \times 10^{-17} \quad (1 \text{ seul chiffre significatif sur } d)$$

On constate que  $\frac{P}{F_e} = 1$ , ainsi  $P = F_e$  donc le poids de l'électron est bien négligeable devant la force électrique qu'il subit.

1.3. Cette même question a été posée au bac Centres étrangers (Exo I, 2.3.), il y a quelques jours ... Fréquenter assidument Labolycée ça sert !

**Démonstration utilisant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :**

Appliquons la 2<sup>ème</sup> loi de Newton au système {électron} dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen :  $\Sigma \vec{F}_{ext} = m_e \cdot \vec{a}$  car  $m_e$  est constante.

$$\vec{F}_e = m_e \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{-e.\vec{E}}{m_e}$$

En projetant sur l'axe horizontal Ox, orienté de A vers B (correspondant à la trajectoire de

l'électron) :  $a_x = \frac{-e.E_x}{m_e}$

Comme  $E_x = -E$  alors  $a_x = \frac{e.E}{m_e}$  (car  $\vec{E}$  orienté vers la gauche)

Par définition,  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  donc  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

En intégrant :  $v_x = \frac{e.E}{m_e} \cdot t + C_1$

On détermine la constante  $C_1$  à l'aide des conditions initiales, à  $t = 0$ ,  $v_x(0) = 0$  donc  $C_1 = 0$ .

Ainsi :  $v_x = \frac{e.E}{m_e} \cdot t$  (1)

Par définition,  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$  donc  $v_x = \frac{dx}{dt}$ .

En intégrant :  $x = \frac{e.E}{2m_e} \cdot t^2 + C_2$  or à  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$  donc  $C_2 = 0$

Ainsi :  $x = \frac{e.E}{2m_e} \cdot t^2$  (2)

Démarche : grâce à (2) on peut maintenant exprimer la date  $t_A$  à laquelle l'électron arrive en A puis en déduire la vitesse à cette date grâce à (1).

(2) donne  $x_A = d = \frac{e.E}{2m_e} \cdot t_A^2$  donc  $t_A = \sqrt{\frac{2m_e \cdot d}{e.E}}$

Dans (1) :  $v_x = \frac{e.E}{m_e} \cdot t_A = \frac{e.E}{m_e} \cdot \sqrt{\frac{2m_e \cdot d}{e.E}} = \sqrt{\frac{e^2 \cdot E^2 \cdot 2m_e \cdot d}{m_e^2 \cdot e.E}} = \sqrt{\frac{2e.E \cdot d}{m_e}} = \sqrt{\frac{2e \cdot \frac{U}{d} \cdot d}{m_e}} = \sqrt{\frac{2e.U}{m_e}}$

Par définition,  $v_A = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x^2} = +v_x$  donc on retrouve bien  $v_A = \sqrt{\frac{2e.U}{m_e}}$ .

### Démonstration utilisant la notion de travail d'une force :

Entre O et A, l'électron n'est soumis qu'à la force électrique et voit son énergie cinétique augmenter. Cette augmentation est due au travail de la force  $\vec{F}_e$  constante entre O et A :

$$\Delta E_c = W_{O \rightarrow A}(\vec{F}_e)$$

$$E_c(A) - E_c(O) = \vec{F}_e \cdot \vec{OA} = \|\vec{F}_e\| \cdot \|\vec{OA}\| \cdot \cos(\vec{F}_e, \vec{OA})$$

$$\frac{1}{2} m_e \cdot v_A^2 - 0 = e.E.d = e \cdot \frac{U}{d} \cdot d = e.U$$

$$v_A^2 = \frac{2.e.U}{m_e}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2e.U}{m_e}}$$

1.4.  $v_A = \sqrt{\frac{2 \times 1,60 \times 10^{-19} \times 100 \times 10^3}{9,11 \times 10^{-31}}} = 1,87 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  (soit 62,5 % de la vitesse de la lumière dans le vide)

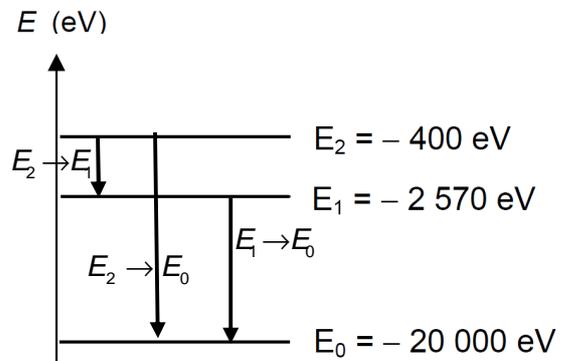
1.5. La courbe  $\gamma = f(v)$  montre que pour une vitesse égale à  $v_A$ , le coefficient de Lorentz est notablement supérieur à 1 (environ 1,3).

Le phénomène de dilatation des durées n'est alors plus négligeable ; le modèle relativiste conviendrait mieux à l'étude du mouvement de l'électron.

## 2. Emission de rayons X

2.1. Les transitions électroniques de l'atome qui s'accompagnent d'une émission de rayonnement correspondent à une transition d'un niveau supérieur vers un niveau d'énergie inférieur.

Ainsi, 3 transitions sont possibles ici :  $E_2 \rightarrow E_0$ ,  $E_2 \rightarrow E_1$  et  $E_1 \rightarrow E_0$ .



2.2. D'après la relation de Planck :  $|\Delta E| = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$  ainsi  $\lambda = h \cdot \frac{c}{|\Delta E|}$  avec  $\Delta E$  en J.

$$\lambda_{2 \rightarrow 0} = 6,63 \times 10^{-34} \times \frac{3,00 \times 10^8}{|-20000 + 400| \times 1,60 \times 10^{-19}} = 6,34 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$\lambda_{2 \rightarrow 1} = 6,63 \times 10^{-34} \times \frac{3,00 \times 10^8}{|-2570 + 400| \times 1,60 \times 10^{-19}} = 5,72 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\lambda_{1 \rightarrow 0} = 6,63 \times 10^{-34} \times \frac{3,00 \times 10^8}{|-20000 + 2570| \times 1,60 \times 10^{-19}} = 7,13 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Ces trois longueurs d'onde appartiennent au domaine des rayons X car  $10^{-12} < \lambda < 10^{-8}$  m, ce qui est cohérent avec le titre du paragraphe.

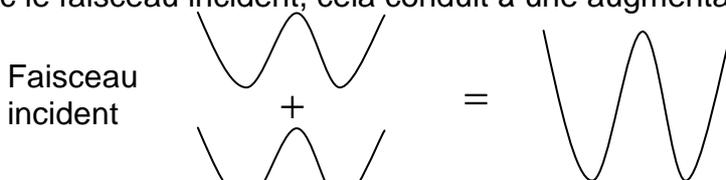
## 3. Application à l'étude des structures cristallines

3.1. Les points  $A_1$  et  $A_2$  vibrent **en phase**, les deux rayons incidents interfèrent de façon **constructive**.

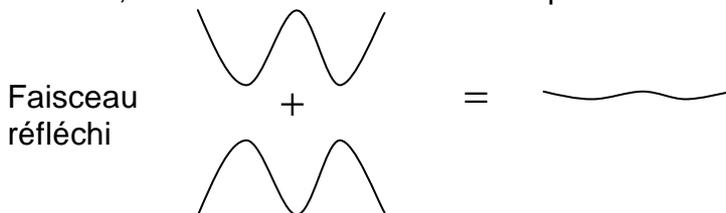
Les points  $B_1$  et  $B_2$  vibrent **en opposition de phase**, les deux rayons réfléchis interfèrent de façon **destructive**.

Les amplitudes des ondes qui interfèrent s'additionnent.

Avec le faisceau incident, cela conduit à une augmentation de l'amplitude de l'onde résultante.



Au contraire, avec le faisceau réfléchi l'amplitude de l'onde résultante est nulle.



Voir : <http://labosims.org/animations/interference/interference.html>

3.2. Dans le cas d'interférences constructives :  $\delta = k\lambda$ .

Pour une différence de parcours minimale,  $k = 1$  ainsi  $\delta = \lambda$ .

De plus, ici  $\delta = 2.d.\sin\theta$ .

Alors  $\delta = 2.d.\sin\theta = \lambda$  et donc  $d = \frac{\lambda}{2 \sin\theta}$

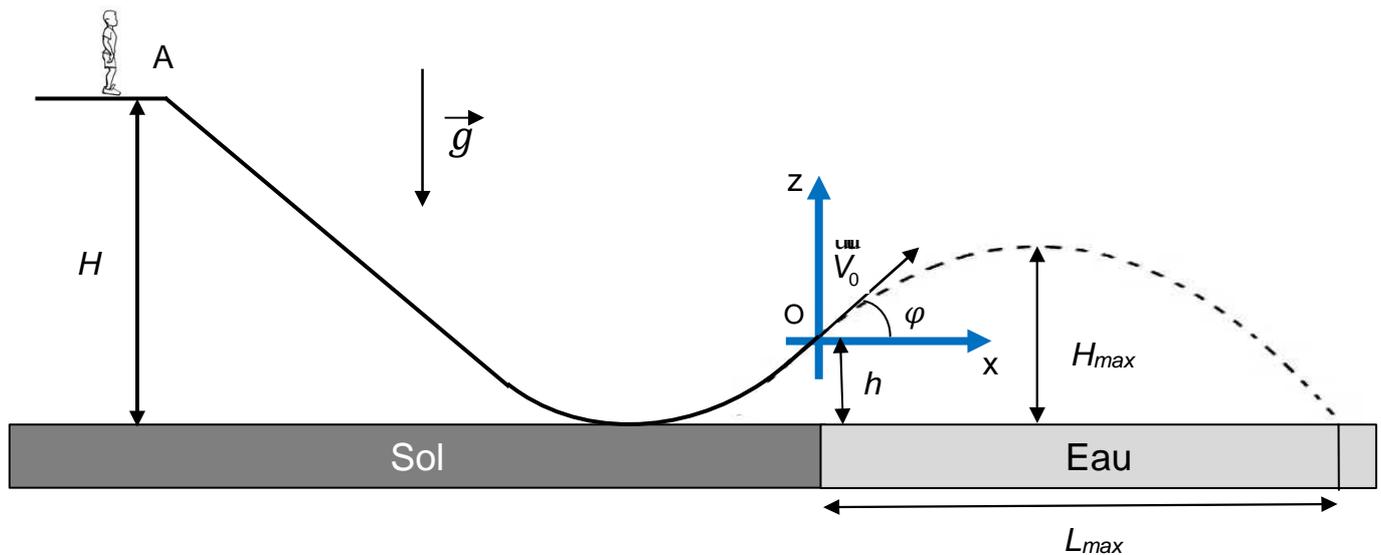
$$d = \frac{0,154 \times 10^{-9}}{2 \times \sin(10,4^\circ)} = 4,27 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Remarque : on retrouve une valeur cohérente avec la distance interatomique (1<sup>ère</sup> S).

Le *water jump* est une activité en plein essor. Le principe en est simple : un skieur muni d'une combinaison glisse sur un toboggan préalablement mouillé et terminé par un tremplin. Puis, à la sortie de ce dernier, il effectue un saut en chute libre avant de terminer sa course dans un plan d'eau.



Le *water jump* est également utilisé l'été par les skieurs qui ne peuvent s'entraîner sur les pistes faute de neige.



**Données**

- Intensité du champ de pesanteur terrestre :  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .
- Masse du skieur et de son équipement :  $m = 73 \text{ kg}$ .

Il existe quatre tremplins dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous.

	Hauteur H	Hauteur h	Angle $\varphi$
Tremplin débutant	$H_1 = 3,5 \text{ m}$	$h_1 = 0,85 \text{ m}$	$\varphi_1 = 20^\circ$
Tremplin médian	$H_2 = 7,0 \text{ m}$	$h_1 = 0,85 \text{ m}$	$\varphi_1 = 20^\circ$
Tremplin averti	$H_1 = 3,5 \text{ m}$	$h_2 = 1,7 \text{ m}$	$\varphi_2 = 45^\circ$
Tremplin expert	$H_2 = 7,0 \text{ m}$	$h_2 = 1,7 \text{ m}$	$\varphi_2 = 45^\circ$

Le sol horizontal est choisi comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur.

Les dimensions du skieur étant faibles devant toutes les autres utilisées dans le problème, il est modélisé par un point matériel. Les frottements seront négligés dans toutes les étapes du mouvement.

L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

L'origine des énergies potentielles est choisie au niveau du sol.

### **Partie 1 : étude énergétique du skieur sur le tremplin**

- 1.1. Par des mesures, estimer l'angle  $\varphi$  du tremplin photographié de profil.
- 1.2. S'agit-il du tremplin débutant ou expert ?
- 1.3. Quel est l'intérêt d'humidifier le toboggan avant son utilisation ?

Utilisation du tremplin débutant

- 1.4. Exprimer l'énergie mécanique  $E_{mA}$  du skieur à l'instant initial, lorsqu'il s'élance du point  $A$  sans vitesse initiale.
- 1.5. Déterminer la relation entre l'énergie mécanique  $E_{mO}$  au moment où il quitte la piste en  $O$  et l'énergie mécanique  $E_{mA}$ . Justifier votre réponse.
- 1.6. Déterminer la vitesse du skieur au point  $O$ .

Utilisation du tremplin médian

- 1.7. Le skieur s'élance à présent depuis le tremplin médian. Expliquer qualitativement comment varie son énergie mécanique par rapport à la situation précédente.
- 1.8. Peut-on affirmer que la vitesse du skieur à la sortie du tremplin double lorsque la hauteur du toboggan double ? Justifier qualitativement votre réponse.

### **Partie 2 : étude du mouvement du skieur après avoir quitté le tremplin**

- 2.1. En détaillant votre raisonnement et en précisant la loi utilisée, exprimer le vecteur accélération  $\vec{a}$  du skieur lorsqu'il a quitté le toboggan.
- 2.2. On déclenche le chronomètre lorsque le skieur est au point  $O$ . Dédire de la question précédente que les équations horaires du mouvement, dans le repère  $(O,x,z)$ , peuvent s'écrire :

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t$$

### Partie 3 : application à l'entraînement pour les skieurs durant l'été

En ski acrobatique (« free style »), il faut effectuer un maximum de figures lors des sauts.

Pour ce faire les skieurs doivent sauter le plus haut possible.



**3.1.** Que vaut la composante de la vitesse du skieur suivant  $z$  lorsqu'il atteint son point culminant ?

**3.2.** Le skieur atteint sa hauteur maximale à l'instant  $t_{max}$ . Exprimer  $t_{max}$  en fonction de  $v_0$ ,  $g$  et  $\varphi$ .

**3.3.** À l'aide des équations horaires, montrer que l'expression de l'ordonnée correspondante, notée  $z_{max}$  dans le repère  $(O,x,z)$ , vaut  $z_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}$ .

**3.4.** Calculer la hauteur maximale atteinte  $H_{max}$  au-dessus du plan d'eau si le skieur utilise le « tremplin averti » sachant que sa vitesse en  $O$  vaut  $v_0 = 5,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**3.5.** Vous êtes entraîneur d'une équipe de ski acrobatique. Choisir le tremplin à utiliser pour que les skieurs fassent un maximum de figures en vol. Justifier votre réponse à l'aide de l'expression de  $z_{max}$  établie à la question 2.

**Partie 1 : étude énergétique du skieur sur le tremplin**

1.1. (0,5) À l'aide d'un rapporteur, on mesure  $\varphi = 20^\circ$ .

Si l'on ne dispose pas d'un rapporteur, on peut utiliser une relation trigonométrique dans le triangle OCD rectangle en C.

$$\tan \varphi = \frac{OC}{DC}$$

$$\tan \varphi = \frac{1,4}{4,0}$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{1,4}{4,0} \right) = 19^\circ$$



1.2. (0,25) Comme l'angle est proche de  $20^\circ$ , il s'agit du tremplin débutant.

1.3. (0,25) L'humidification du tremplin avant utilisation a pour objectif de réduire au maximum les frottements.

Utilisation du tremplin débutant

1.4. (0,25)  $E_{mA} = E_{PPA} + E_{CA}$

Comme la vitesse initiale est nulle, alors  $E_{CA} = 0$  et  $E_{mA} = E_{PPA} = m \cdot g \cdot H$

1.5. (0,5) Les frottements sont négligés ainsi il y a conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{mA} = E_{mO}$$

1.6. (0,75)  $E_{mA} = E_{mO}$

$$m \cdot g \cdot H_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h_1$$

On divise tous les membres par  $m$ .

$$g \cdot H_1 = \frac{1}{2} \cdot v_0^2 + g \cdot h_1$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_0^2 = g \cdot H_1 - g \cdot h_1$$

$$v_0^2 = 2 \cdot g \cdot (H_1 - h_1)$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H_1 - h_1)}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \times 9,81 \times (3,5 - 0,85)} = 7,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Utilisation du tremplin médian

1.7. (0,25) Comme vu en 1.4.  $E_m = m \cdot g \cdot H$ , comme  $H$  augmente alors  $E_m$  augmente.

1.8. (0,25) Comme vu en 1.6. :  $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H_2 - h_1)}$ , ce qui montre que la vitesse n'est pas proportionnelle à la hauteur du tremplin  $H_2$ .

Si  $H_2$  double alors  $v_0$  n'est pas doublée.

**Partie 2 : étude du mouvement du skieur après avoir quitté le tremplin**

2.1. (0,5) Système : le skieur de masse  $m$       Référentiel : le sol, terrestre supposé galiléen

Lorsque le skieur a quitté le toboggan, il n'est soumis qu'à son poids ; en effet on néglige les frottements.

D'après la deuxième loi de Newton, avec la masse du skieur constante :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= m \cdot \vec{a} \\ m \cdot \vec{g} &= m \cdot \vec{a} \\ \vec{a} &= \vec{g} \end{aligned}$$

2.2. (1) En projection selon les axes Ox et Oz du repère choisi et compte tenu du sens du vecteur  $\vec{g}$  indiqué sur le schéma il vient :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

À chaque instant :  $\overset{r}{a} = \frac{d\overset{r}{v}}{dt}$  donc  $a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}$  et  $a_z = \frac{dv_z(t)}{dt}$

$$\overset{r}{v} \begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_z(t) = -g.t + Cte_2 \end{cases}$$

Coordonnées du vecteur vitesse initiale  $\overset{r}{v}_0$  :

$$\overset{r}{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos \varphi \\ v_{0z} = v_0 \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale  $\overset{r}{v}_0 = \overset{r}{v}(0)$  on a :

$$\begin{aligned} v_0 \cdot \cos \varphi &= Cte_1 \\ v_0 \cdot \sin \varphi &= 0 + Cte_2 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\overset{r}{v} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cdot \cos \varphi \\ v_z(t) = -g.t + v_0 \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

À chaque instant  $\overset{uuu}{v} = \frac{d\overset{uuu}{OG}}{dt}$  donc:  $v_x = \frac{dx(t)}{dt}$  et  $v_z = \frac{dz(t)}{dt}$

$$\overset{uuu}{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t + Cte_3 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t + Cte_4 \end{cases}$$

Or à  $t = 0$  le projectile est au point de coordonnées  $(x(0) = 0; z(0) = 0)$  donc :

$$\begin{aligned} 0 + Cte_3 &= 0 \\ 0 + 0 + Cte_4 &= 0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\overset{uuu}{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t \end{cases}$$

### Partie 3 : application à l'entraînement pour les skieurs durant l'été

**3.1. (0,25)** Lorsque le skieur atteint son point culminant, la composante verticale  $v_z$  de la vitesse est nulle.

**3.2. (0,25)** On a précédemment établi que  $v_z(t) = -g.t + v_0 \cdot \sin \varphi$

Pour l'altitude maximale, il vient  $0 = -g.t_{max} + v_0 \cdot \sin \varphi$

$$\text{Soit } t_{max} = \frac{v_0 \cdot \sin \varphi}{g}$$

**3.3. (0,25)**  $z_{max} = z(t_{max}) = -\frac{1}{2} g \cdot t_{max}^2 + v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t_{max}$

$$z_{max} = -\frac{1}{2} g \cdot \left( \frac{v_0 \cdot \sin \varphi}{g} \right)^2 + v_0 \cdot \sin \varphi \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \varphi}{g}$$

$$z_{max} = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{g^2} + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{g} = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{g} + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}$$

**3.4. (0,25)** Pour le tremplin averti  $\varphi = \varphi_2 = 45^\circ$  et  $h = h_2 = 1,7$  m.

$$H_{max} = z_{max} + h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi_2}{2g} + h_2$$

$$H_{max} = \frac{5,9^2 \times \sin^2 45}{2 \times 9,81} + 1,7 = 1,7 + 0,89 = \mathbf{2,6 \text{ m.}}$$

**3.5. (0,5)** Pour faire un maximum de figures en vol, les skieurs doivent atteindre une hauteur  $H_{max}$  la plus grande possible.

$$H_{max} = z_{max} + h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g} + h$$

On a établi en 1.6. que  $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}$ , ainsi  $H_{max} = \frac{2 \cdot g \cdot (H - h) \cdot \sin^2 \varphi}{2g} + h$

$$H_{max} = (H - h) \cdot \sin^2 \varphi + h$$

Calculons  $H_{max}$  pour tous les tremplins :

Tremplin débutant :  $H_{max} = (H_1 - h_1) \cdot \sin^2 \varphi_1 + h_1$

$$H_{max} = (3,5 - 0,85) \times \sin^2 20^\circ + 0,85 = 1,2 \text{ m}$$

Tremplin médian :  $H_{max} = (H_2 - h_1) \cdot \sin^2 \varphi_1 + h_1$

$$H_{max} = (7,0 - 0,85) \times \sin^2 20^\circ + 0,85 = 1,6 \text{ m}$$

Tremplin averti : calculé en 3.4.  $H_{max} = 2,6 \text{ m}$

Tremplin expert :  $H_{max} = (H_2 - h_2) \cdot \sin^2 \varphi_2 + h_2$

$$H_{max} = (7,0 - 1,7) \times \sin^2 45^\circ + 1,7 = 4,4 \text{ m}$$

Sans surprise, on utilisera le tremplin expert.

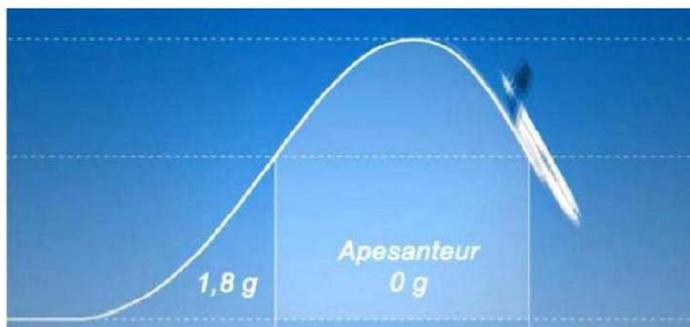
Au printemps 2015, l'airbus A310 Zéro-G a réalisé ses premiers vols scientifiques. Exploité par une filiale du Centre National d'Études Spatiales (CNES), cet avion permet de simuler des conditions d'apesanteur en décrivant des trajectoires paraboliques. Les scientifiques peuvent ainsi mener des expériences sans avoir recours aux missions spatiales.

### Document 1 : Trajectoire parabolique de l'A310 Zéro-G

Pour que les passagers et le matériel embarqués dans l'Airbus A310 Zéro-G soient en apesanteur dans le référentiel de l'avion, et qu'ils se mettent à y « flotter », il faut que l'avion soit en chute libre.

Dans le référentiel terrestre, un corps est en chute libre lorsque la seule force qui s'exerce sur lui est le poids. Comment mettre l'avion en condition de "chute libre", peut-on se demander. Rien de plus "simple".

Il suffit que le pilote de l'avion arrive à suivre la bonne trajectoire parabolique.



Extrait d'un article de presse

### Document 2 : Caractéristiques du vol parabolique

Angle par rapport à l'horizontale au début de la parabole	47°
Altitude au départ et à la fin de la parabole	7 600 m
Vitesse au début de la parabole	527 km.h <sup>-1</sup>
Altitude au sommet de la parabole	8 200 m
Vitesse au sommet de la parabole	355 km.h <sup>-1</sup>
Durée d'apesanteur (0 g)	22 s

### Données :

- masse de l'airbus A310 Zéro-G et de son équipement :  $m = 1,5 \times 10^5$  kg ;
- constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup>.kg<sup>-1</sup>.s<sup>-2</sup> ;
- intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre :  $g = 9,81$  N.kg<sup>-1</sup> ;
- masse de la Terre :  $M_T = 5,97 \times 10^{24}$  kg ;
- rayon de la Terre :  $R_T = 6,38 \times 10^6$  m.

On se place dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen sur la durée d'une parabole.

## 1. Étude du mouvement de chute libre

On souhaite vérifier, par des considérations énergétiques, que la trajectoire suivie par l'avion est modélisable par une chute libre.

1.1. Rappeler la condition que doit vérifier l'énergie mécanique d'un système lorsqu'il est en chute libre.

1.2. Les caractéristiques de la trajectoire parabolique suivie par l'avion sont-elles compatibles avec une chute libre de l'avion ? Argumenter votre réponse avec un calcul d'énergie.

## 2. Intensité du champ de pesanteur dans un vol Zéro-G

2.1. En détaillant votre raisonnement, montrer que l'intensité de la pesanteur  $g_h$ , en un point situé à l'altitude  $h$  au-dessus de la surface de la Terre, peut s'écrire :

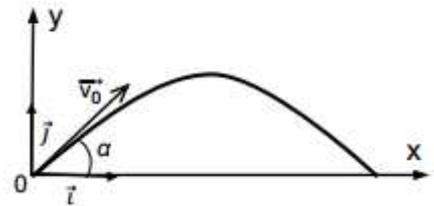
$$g_h = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

2.2. Justifier, à partir du résultat précédent, qu'il est légitime de considérer que l'intensité de la pesanteur est constante lors d'un vol Zéro-G.

## 3. Durée des phases d'apesanteur

On étudie le mouvement dans le repère  $xOy$  donné ci-contre, le point  $O$  étant le début de la parabole.

On considère que l'intensité de la pesanteur terrestre est constante lors d'un vol Zéro-G et qu'elle est égale à  $g = 9,8 \text{ N.kg}^{-1}$ .



3.1. Énoncer la deuxième loi de Newton.

3.2. Montrer que les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  d'un système en chute libre ont pour expressions :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{cases}$$

3.3. En exploitant les équations horaires, calculer la durée d'apesanteur. Ce résultat est-il cohérent avec la donnée du document 2 ?

3.4. Quels paramètres faut-il modifier pour augmenter la durée d'apesanteur ? D'après vous, cela vous semblerait-il possible ?

### 1. Étude du mouvement de chute libre

1.1. Lorsqu'un système est en chute libre, il n'est soumis qu'à son poids. Dans ces conditions l'énergie mécanique du système se conserve.

1.2. Vérifions la conservation de l'énergie mécanique entre deux positions de l'avion. On supposera que l'intensité  $g$  du champ de pesanteur est constante au cours du mouvement et qu'elle est égale à celle au niveau de la surface de la Terre.

Position 1 : l'avion démarre sa parabole

Altitude  $z_1 = 7\,600$  m

Vitesse  $v_1 = 527$  km.h<sup>-1</sup>

Position 2 : l'avion est au sommet de sa parabole

$z_2 = 8\,200$  m

$v_2 = 355$  km.h<sup>-1</sup>

Énergie mécanique

$$E_{m1} = E_{C1} + E_{PP1}$$

$$E_{m1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot z_1$$

$$E_{m1} = \frac{1}{2} \times 1,5 \times 10^5 \times \left(\frac{527}{3,6}\right)^2 + 1,5 \times 10^5 \times 9,81 \times 7600$$

$$E_{m2} = E_{C2} + E_{PP2}$$

$$E_{m2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot z_2$$

$$E_{m2} = \frac{1}{2} \times 1,5 \times 10^5 \times \left(\frac{355}{3,6}\right)^2 + 1,5 \times 10^5 \times 9,81 \times 8200$$

$$E_{m1} = 1,3 \times 10^{10} \text{ J}$$

$$E_{m2} = 1,3 \times 10^{10} \text{ J}$$

L'énergie mécanique **est conservée**, les caractéristiques de la trajectoire parabolique sont compatibles avec une chute libre de l'avion.

*Remarque : en réalité l'avion subit d'autres forces que le poids, mais elle se compensent.*

### 2. Intensité du champ de pesanteur dans un vol zéro-G

2.1. On considère que la force poids  $\vec{P}$  est égale à la force d'attraction gravitationnelle  $\vec{F}_{T/o}$  exercée par la Terre sur un objet de masse  $m$ .

$$P = m \cdot g_h$$

$$F_{T/o} = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$\text{Ainsi } m \cdot g_h = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{(R_T + h)^2}$$

Finalement, on retrouve l'expression proposée  $g_h = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$

2.2. Au cours du vol Zéro-G, l'altitude vaut entre 7 600 m et 8 200 m.

Déterminons l'intensité du champ de pesanteur pour chacune de ces altitudes :

$$g_2 = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24}}{(6,38 \times 10^6 + 8200)^2} = 9,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_1 = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24}}{(6,38 \times 10^6 + 7600)^2} = 9,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

En stockant en mémoire de la calculatrice  $g_1$  et  $g_2$ , on trouve une variation très faible de  $\Delta g = -1,8 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Ainsi, il est légitime de considérer que l'intensité de la pesanteur est constante lors d'un vol Zéro-G.

*Remarque : autre méthode  $g = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2}$  avec  $G$ ,  $M_T$  et  $R_T$  constantes.*

$h$  varie de  $8200 - 7600 = 600$  m, or  $R_T = 6,38 \times 10^6$  m. La variation de  $h$  est négligeable face à  $R_T$  alors  $g$  est constante.

### 3. Durée des phases d'apesanteur

**3.1.** Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures qui s'appliquent sur un système de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  est égale à la dérivée par rapport au temps du

vecteur quantité de mouvement de son centre d'inertie :  $\Sigma \vec{F}_{ext.} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

Si la masse du système est constante, cette loi s'écrit  $\Sigma \vec{F}_{ext.} = m \cdot \vec{a}_G$  où  $\vec{a}_G$  est le vecteur accélération du centre d'inertie du système.

**3.2.** Système {avion} de masse  $m$  supposée constante et de centre d'inertie  $G$

Référentiel terrestre supposé galiléen

Repère  $(Ox; Oy)$  indiqué dans le sujet

Forces : poids de l'avion,  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

les forces de frottement de l'air ainsi que la poussée d'Archimède sont négligés

Deuxième loi de Newton :  $\Sigma \vec{F}_{ext.} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\text{soit } \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{soit } m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{d'où } \boxed{\vec{a}_G = \vec{g}}$$

En projection dans le repère  $(Ox; Oy)$  :  $\vec{a}_G \begin{pmatrix} a_x(t) = g_x = 0 \\ a_y(t) = g_y = -g \end{pmatrix}$

$$\text{Or } \vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} \quad \text{donc } \vec{a}_G \begin{pmatrix} a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{pmatrix} \quad \text{en primitivant } \vec{v}_G \begin{pmatrix} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g \cdot t + C_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{À } t = 0, \vec{v}_G(t=0) = \vec{v}_0 \quad \text{avec } v_0 \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_0 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs, il vient } \begin{pmatrix} C_1 = v_0 \cdot \cos \alpha \\ 0 + C_2 = v_0 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement : } \vec{v}_G \begin{pmatrix} v_x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } \vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} \quad \text{donc } \vec{v}_G \begin{pmatrix} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{en primitivant } \vec{OG} \begin{pmatrix} x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + C'_1 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + C'_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{À } t = 0, \vec{OG}(t=0) = \vec{0} \quad \text{donc en égalant les coordonnées des deux vecteurs } \begin{pmatrix} C'_1 = 0 \\ C'_2 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement les équations horaires } x(t) \text{ et } y(t) \text{ sont : } \vec{OG} \begin{pmatrix} x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t \end{pmatrix}$$

**3.3.** La durée d'apesanteur est la durée nécessaire pour que l'avion, partant du point O, se retrouve à la même altitude, ici égale à zéro.

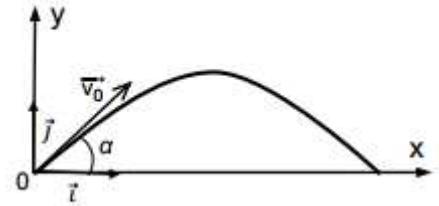
Il faut résoudre l'égalité  $y(t) = 0$ , et on ne retient pas la solution  $t = 0$ .

$$-\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t = 0$$

$$-\frac{1}{2}g.t + v_0.\sin\alpha = 0$$

$$t = \frac{2.v_0.\sin\alpha}{g}$$

$$t = \frac{2 \times \left( \frac{527}{3,6} \times \sin 47 \right)}{9,8} = \mathbf{22 \text{ s}}$$



On retrouve la même valeur que celle indiquée dans le document 2.

**3.4.** On a déterminé que la durée d'apesanteur a pour expression  $t = \frac{2.v_0.\sin\alpha}{g}$ .

Pour augmenter  $t$ , deux paramètres sont modifiables, car  $g$  est une constante :

- il faut augmenter  $v_0$  la vitesse initiale en début de parabole,
- il faut augmenter l'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

Ces deux solutions semblent peu réalistes, l'augmentation de vitesse nécessiterait des réacteurs beaucoup plus puissants ; car il s'agit d'un avion de ligne très lourd.

Tandis que l'augmentation de l'angle  $\alpha$  risquerait de mettre en péril la structure de l'avion.

Ces paramètres semblent plus facilement modifiables pour un avion de chasse.

En février 1971, la mission américaine Apollo XIV devient la huitième mission habitée du programme Apollo et la troisième à se poser sur la Lune. Lors de cette mission, un des astronautes, Alan B. Shepard Jr, installe un réflecteur de lumière sur le sol lunaire. Il réalise aussi un rêve : jouer au golf sur la Lune !

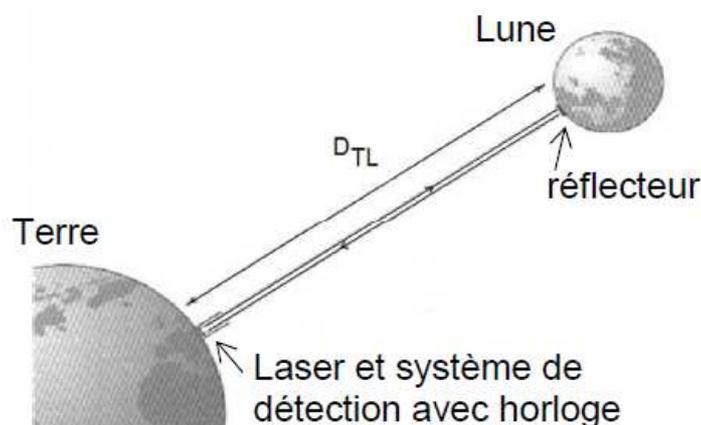
**Données :**

- Célérité de la lumière dans le vide et dans l'air :  $c = 299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .
- Constante gravitationnelle :  $G = 6,67 \times 10^{-11}\text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ .
- Valeur du champ de pesanteur terrestre :  $g_T = 9,81\text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$ .
- La Terre et la Lune sont supposées sphériques.

	Masse	Rayon
Terre	$M_T = 5,98 \times 10^{24}\text{ kg}$	$R_T = 6,38 \times 10^3\text{ km}$
Lune	$M_L = 7,33 \times 10^{22}\text{ kg}$	$R_L = 1,74 \times 10^3\text{ km}$

**1. Mesure de la distance Terre-Lune**

L'expérience « LASER-LUNE » de l'Observatoire de la Côte d'Azur (OCA) a pour objectif la détermination précise de la distance Terre-Lune et de ses variations.



Le principe de la mesure est de déterminer la durée  $T$  d'un aller-retour d'une impulsion LASER émise du sol terrestre vers un réflecteur lunaire composé de nombreux prismes qui jouent le rôle de miroir. La lumière est réfléchi dans la même direction que le rayon lumineux incident. On en déduit la distance  $D_{TL}$  séparant la Terre de la Lune.

La valeur moyenne de la distance  $D_{TL}$ , étant d'environ  $3,84 \times 10^8\text{ m}$ , on prévoit un intervalle  $T$  de quelques secondes entre l'émission d'une impulsion et la réception du signal de retour correspondant. Actuellement, la distance Terre-Lune peut être déterminée avec une précision de 5 mm.

D'après le site [www.culturesciencesphysique.ens-lyon.fr](http://www.culturesciencesphysique.ens-lyon.fr)

1.1. Montrer que l'information donnée dans la présentation de l'expérience concernant la durée  $T$  est correcte. Justifier votre réponse.

1.2. Les incertitudes relatives sur la distance  $D_{TL}$  et la durée  $T$  s'expriment par la relation :  $\frac{U(D_{TL})}{D_{TL}} = \frac{U(T)}{T}$ , où  $U(D_{TL})$  et  $U(T)$  sont les incertitudes absolues sur la mesure de  $D_{TL}$  et de  $T$ .

Le tableau ci-après donne la précision relative de quelques horloges performantes :

Type d'horloge	Horloge à quartz	Horloge atomique au césium	Horloge optique
Précision relative	$10^{-9}$	$10^{-16}$	$10^{-18}$

Quel type d'horloge faut-il utiliser pour obtenir une distance  $D_{TL}$  précise à 5 mm près ? Justifier.

## 2. Golf lunaire

Interview de l'astronaute Alan B. Shepard Jr :

« - Dix ans après votre premier vol, vous êtes allé sur la Lune (Apollo XIV, en 1971), où vous vous êtes livré à un exercice assez original...

- Oui, j'ai joué au golf sur la Lune ! J'ai failli rater la première balle parce que j'étais gêné par ma combinaison spatiale et elle a lamentablement échoué dans un cratère tout proche. La seconde, grâce à la faible gravité, est partie à des kilomètres et des kilomètres, sans bruit, semblant ne jamais vouloir se poser. »

*D'après l'interview de F. Nolde-Langlois - 29/06/1995 – Libération*

Dans cette partie, on souhaite vérifier quelques-uns des propos formulés par l'astronaute lors de l'interview.

### 2.1. Interaction gravitationnelle lunaire.

Faire un schéma d'un objet de masse  $m$  à l'altitude  $h$  au voisinage de la Lune, en représentant :

- le vecteur unitaire  $\hat{u}$  orienté de l'objet vers le centre de la Lune ;
- le vecteur  $\vec{F}$  modélisant la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Lune sur l'objet.

Donner l'expression vectorielle de cette force d'interaction gravitationnelle en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $M_L$ ,  $h$ ,  $R_L$  et  $\hat{u}$ .

### 2.2. Champ de pesanteur lunaire.

2.2.1. En faisant l'hypothèse que le poids sur la Lune est égal à la force d'interaction gravitationnelle, donner l'expression vectorielle  $\vec{g}_L$  du champ de pesanteur à une altitude  $h$  en fonction de  $G$ ,  $M_L$ ,  $h$ ,  $R_L$  et  $\hat{u}$ .

2.2.2. Calculer la valeur du champ de pesanteur  $g_L$  à la surface de la Lune.

2.2.3. Expliquer pourquoi Alan B. Shepard Jr parle alors de « faible gravité » sur la Lune.

### 2.3. Mouvement d'une balle de golf dans le champ de pesanteur lunaire.

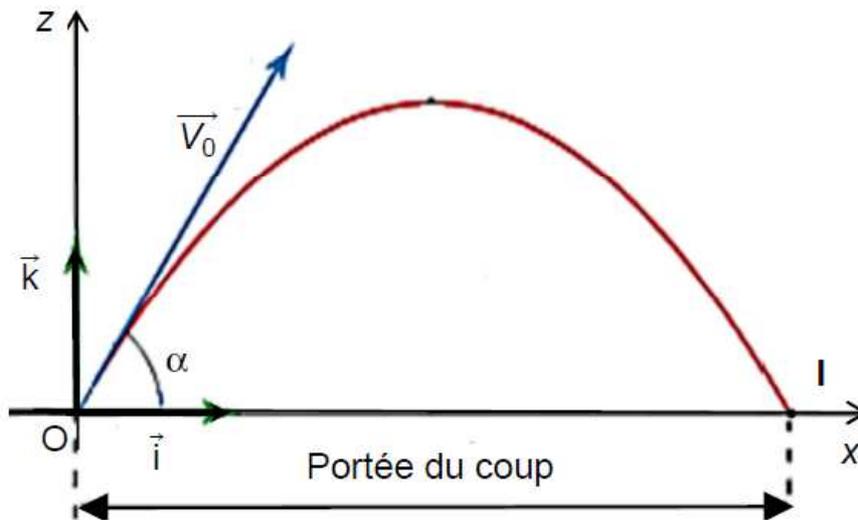
Dans cette partie, on fait l'hypothèse que le champ de pesanteur lunaire est uniforme et que sa valeur est  $g_L = 1,61 \text{ N.kg}^{-1}$ .

On se place dans un référentiel lunaire supposé galiléen.

À la date  $t = 0 \text{ s}$ , l'astronaute frappe la balle de golf et lui communique une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

La balle de golf est modélisée par un point matériel M.

L'origine du repère  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  est prise au point de départ de la balle.



2.3.1. Une première modélisation du mouvement conduit à l'expression suivante des coordonnées du vecteur position  $\vec{OM}$  de la balle lors de son mouvement :

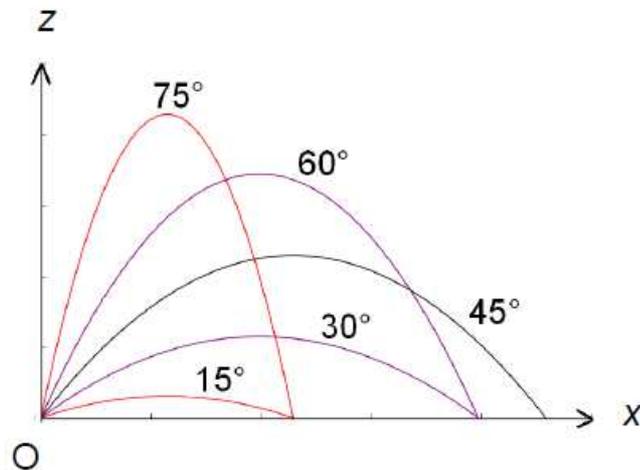
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2} g_L \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{cases}$$

À partir des coordonnées du vecteur position  $\vec{OM}$  de la balle de golf, montrer que dans le modèle utilisé, seule la force d'interaction gravitationnelle a été prise en compte. Détailler la démarche suivie.

### 2.3.2. Portée du coup.

La portée du coup est la distance entre le point de lancement O et le point d'impact I au sol.

Pour une même valeur de la vitesse  $V_0$ , on donne la représentation de la modélisation de la trajectoire de la balle pour différentes valeurs de l'angle  $\alpha$ .



a) La portée du coup est donnée par la relation :

$$x_I = \frac{(v_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_L}$$

En quoi cette expression est-elle cohérente avec les représentations des trajectoires sur le graphique ci-dessus ?

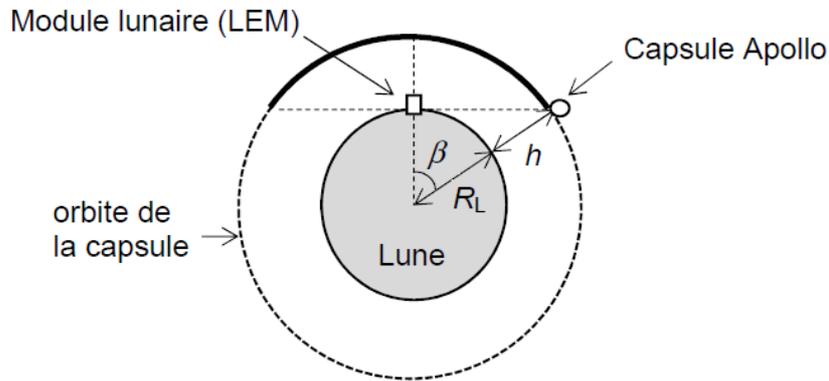
b) Alan B. Shepard Jr se place dans les conditions les plus favorables afin d'atteindre un record sur la Lune. Il communique à la balle une vitesse initiale  $V_0$  de  $100 \text{ km.h}^{-1}$ . La valeur de la portée de son coup est alors de 470 m.

À quelle distance aurait-il pu envoyer la balle sur Terre, avec les mêmes conditions initiales ? Commenter.

### 3. Communication entre la Lune et la capsule Apollo

Quand elle arrive au voisinage de la Lune, la capsule Apollo est mise en orbite à une altitude  $h$  égale à 110 km. Son mouvement est circulaire et uniforme autour du centre de la Lune. Le module lunaire (LEM) est alors envoyé sur la Lune, avec deux astronautes à son bord. Le troisième astronaute reste à bord de la capsule Apollo.

Le schéma ci-dessous représente l'orbite de la capsule Apollo autour de la Lune. Les échelles ne sont pas respectées.



L'étude du mouvement de la capsule se fait dans le référentiel lunocentrique supposé galiléen, défini par le centre de la Lune supposée sphérique et trois axes dirigés vers trois étoiles fixes. Dans cette étude, on néglige la rotation de la lune sur elle-même dans le référentiel lunocentrique.

3.1. Donner l'expression de la valeur du vecteur accélération de la capsule sur son orbite en fonction de  $G$ ,  $M_L$ ,  $h$ ,  $R_L$ .

3.2. Montrer que la valeur  $v$  de la vitesse de la capsule est donnée par :

$$v = \sqrt{\frac{G.M_L}{R_L + h}}$$

3.3. Vérifier que la durée entre deux passages successifs de la capsule Apollo à la verticale du module lunaire posé sur la Lune vaut environ 2 h.

3.4. Expliquer pourquoi la communication entre les astronautes sur la Lune et leur collègue resté dans la capsule ne peut se faire que sur la partie de l'orbite représentée en gras.

3.5. Quelle est la durée de communication possible à chaque révolution de la capsule ?  
*Toute démarche, même non aboutie, sera valorisée.*

## 1. Mesure de la distance Terre-Lune

1.1. Vérifions l'affirmation « on prévoit un intervalle  $T$  de quelques secondes entre l'émission et la réception du signal ».

La lumière parcourt un aller-retour, donc une distance  $2D_{TL}$ , à la célérité  $c$ .

$$c = \frac{2D_{TL}}{T} \text{ donc } T = \frac{2D_{TL}}{c}.$$

$$T = \frac{2 \times 3,84 \times 10^8}{299\,792\,458} = 2,56 \text{ s ce résultat est bien accord avec l'affirmation.}$$

1.2. Distance  $D_{TL}$  précise à 5 mm près signifie  $U(D_{TL}) = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$

Déterminons la précision relative ou incertitude relative sur la durée  $\frac{U(T)}{T}$ , comme on nous

$$\text{donne } \frac{U(D_{TL})}{D_{TL}} = \frac{U(T)}{T},$$

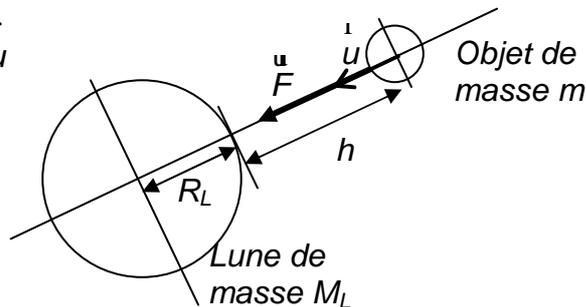
$$\text{On calcule } \frac{U(T)}{T} = \frac{5 \times 10^{-3}}{3,84 \times 10^8} = 1 \times 10^{-11}.$$

Cette précision relative ne permet pas d'utiliser une horloge à quartz, on doit recourir à une horloge atomique au césium ou à une horloge optique.

## 2. Golf lunaire

2.1. Interaction gravitationnelle lunaire.

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m \cdot M_L}{(R_L + h)^2} \cdot \vec{u}$$



2.2. Champ de pesanteur lunaire.

$$2.2.1. \vec{P} = m \cdot \vec{g}_L = \vec{F} = G \cdot \frac{m \cdot M_L}{(R_L + h)^2} \cdot \vec{u}$$

$$\text{On en déduit que } \vec{g}_L = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2} \cdot \vec{u}$$

$$2.2.2. g_L = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2}, \text{ or à la surface de la Lune } h = 0, \text{ ainsi } g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2}$$

$$g_L = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{7,33 \times 10^{22}}{(1,74 \times 10^3 \times 10^3)^2} = 1,61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ ou N} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{avec } R_L \text{ converti en mètre.}$$

2.2.3. Le champ de pesanteur lunaire est bien plus faible que celui de la Terre qui vaut  $9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ , c'est pourquoi Alan B. Shepard parle de faible gravité.

### 2.3. Mouvement d'une balle de golf dans le champ de pesanteur lunaire.

2.3.1. Dans le repère proposé  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  où  $O$  est la position initiale du système, on part des

coordonnées du vecteur position :  $\vec{OM} = \begin{cases} x(t) = V_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g_L \cdot t^2 + V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{cases}$

Par définition  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ , donc  $\vec{v} = \begin{cases} V_x(t) = V_0 \cdot \cos(\alpha) \\ V_z(t) = -g_L \cdot t + V_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$

Par définition  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , donc  $\vec{a} = \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$

Appliquons maintenant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton au système {balle de golf} dans le référentiel sol lunaire, considéré galiléen pendant la durée de l'étude :  $\Sigma \vec{F}_{EXT} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

Comme la masse du système ne change pas, on a  $\Sigma \vec{F}_{EXT} = m \cdot \vec{a}$

Si l'on fait l'hypothèse que le système n'est soumis qu'à la seule force d'attraction gravitationnelle égale à son poids alors  $m \cdot \vec{g}_L = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}_L$ .

Ainsi le vecteur accélération a les mêmes coordonnées que le vecteur champ de pesanteur lunaire. C'est bien ce que l'on a obtenu ci-dessus.

#### 2.3.2. Portée du coup

2.3.2.a) D'après l'expression  $x_I = \frac{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_L}$ , si la portée varie c'est uniquement à cause de la valeur de l'angle  $\alpha$ , car  $V_0$  et  $g_L$  sont identiques pour tous les tirs.

On constate sur les représentations des trajectoires que le point d'impact est le même pour  $\alpha = 15^\circ$  et  $75^\circ$ .

Or  $\sin(2 \times 15) = \sin(2 \times 75)$ , donc l'expression donnée convient.

De même pour  $\alpha = 30^\circ$  et  $60^\circ$ .

Enfin, on observe que la portée est maximale pour l'angle  $\alpha = 45^\circ$ .

Or  $\sin(2 \times 45) = \sin 90^\circ = 1$ , valeur maximale du sinus. Ce qui explique la portée maximale pour cet angle.

2.3.2.b) 1<sup>ère</sup> méthode : Sur la Lune  $x_{I \text{ Lune}} = \frac{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_L}$  et sur Terre  $x_{I \text{ Terre}} = \frac{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_T}$

$$\frac{x_{I \text{ Terre}}}{x_{I \text{ Lune}}} = \frac{\frac{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_T}}{\frac{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_L}} = \frac{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_T} \cdot \frac{g_L}{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)} = \frac{g_L}{g_T}$$

Finalement  $x_{I \text{ Terre}} = \frac{g_L}{g_T} \cdot x_{I \text{ Lune}}$

$$x_{I \text{ Terre}} = \frac{1,61}{9,81} \times 470 = 77,1 \text{ m}$$

On trouve une valeur de la portée bien plus faible que sur la Lune, ce qui est logique puisque seul le paramètre  $g$  situé au dénominateur a été augmenté.

Remarques :

2<sup>ème</sup> méthode : Il est possible de faire le calcul avec l'angle  $\alpha = 45^\circ$  qui correspond réellement

aux conditions les plus favorables. On trouve alors  $x_f = \frac{\left(\frac{100}{3,6}\right)^2 \cdot \sin(2 \times 45)}{9,81} = \frac{\left(\frac{100}{3,6}\right)^2}{9,81} = 79 \text{ m.}$

3<sup>ème</sup> méthode :

Déterminons tout d'abord l'angle avec lequel la balle est partie.

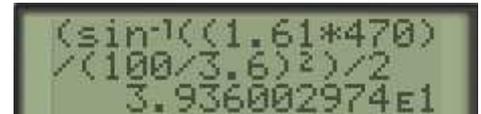
$$x_f = \frac{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_L} \text{ donc } \sin(2\alpha) = \frac{g_L \cdot x_f}{(V_0)^2}$$

$$2\alpha = \arcsin\left(\frac{g_L \cdot x_f}{(V_0)^2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{g_L \cdot x_f}{(V_0)^2}\right)}{2}$$

$$\alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{1,61 \times 470}{\left(\frac{100}{3,6}\right)^2}\right)}{2}$$

$$\alpha = 39,4^\circ$$



Calculons la portée avec cet angle et avec la valeur du champ de pesanteur terrestre  $g_T = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$ .

$$x_f = \frac{(V_0)^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g_T}$$

$$x_f = \frac{\left(\frac{100}{3,6}\right)^2 \cdot \sin(2 \times 39,4)}{9,81} = 77,1 \text{ m}$$



### 3. Communication entre la Lune et la capsule Apollo

3.1. Appliquons la deuxième loi de Newton au système {capsule} de masse  $m_C$  dans le référentiel lunocentrique.

La capsule n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune  $\vec{F}_{L/C}$  et elle possède une masse constante ainsi  $\vec{F}_{L/C} = m_C \cdot \vec{a}$ .

$$G \cdot \frac{M_L \cdot m_C}{(R_L + h)^2} \cdot \vec{u} = m_C \cdot \vec{a} \quad \text{où } \vec{u} \text{ vecteur unitaire vu en 2.1.}$$

$$\vec{a} = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2} \cdot \vec{u}$$

On en déduit la valeur  $a = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2}$

3.2. Le mouvement est circulaire et uniforme, ainsi par définition  $a = \frac{v^2}{r}$  où  $r = R_L + h$ ,

$$\text{donc } \frac{v^2}{R_L + h} = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2} \quad v^2 = G \cdot \frac{M_L}{R_L + h} \quad v = \sqrt{G \cdot \frac{M_L}{R_L + h}}$$

3.3. Pendant une période de révolution  $T$ , la capsule parcourt sa trajectoire de longueur égale au périmètre du cercle de rayon  $R_L + h$  et ce à la vitesse  $v$ .

$$v = \frac{2\pi \cdot (R_L + h)}{T}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot (R_L + h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot (R_L + h)}{\sqrt{G \cdot \frac{M_L}{R_L + h}}}$$

$$T = \frac{2\pi \times (1,74 \times 10^3 \times 10^3 + 110 \times 10^3)}{\sqrt{6,67 \times 10^{-11} \times \frac{7,33 \times 10^{22}}{1,74 \times 10^3 \times 10^3 + 110 \times 10^3}}}$$

$$T = 7,15 \times 10^3 \text{ s}$$

En divisant par 3600, on obtient  $T = 1,99 \text{ h}$ .

On retrouve bien la valeur d'environ 2h.

*distances converties en m*

```

2*π*(1.74E6+110E
3)/√(6.67E-11*7.
33E22/(1.74E6+11
0E3))
7.150271898E3
Ans/3600
1.986186638E0
    
```

3.4. La communication entre la capsule Apollo et le module lunaire ne peut se faire que s'il n'y a pas d'obstacle entre eux. Les ondes se propagent en ligne droite. Ce qui correspond uniquement à la partie de l'orbite représentée en gras.

3.5. Il faut déterminer la durée du parcours qui correspond à la partie de l'orbite représentée en gras.

Elle correspond à la durée nécessaire au balayage de l'angle  $2\beta$ .

Dans le triangle rectangle délimité par la capsule, le LEM et le centre de la Lune, on a  $\cos \beta = \frac{R_L}{R_L + h}$

$$\beta = \arccos \left( \frac{R_L}{R_L + h} \right)$$

$$\beta = \arccos \left( \frac{1,74 \times 10^6}{1,74 \times 10^6 + 110 \times 10^3} \right) = 19,9^\circ$$

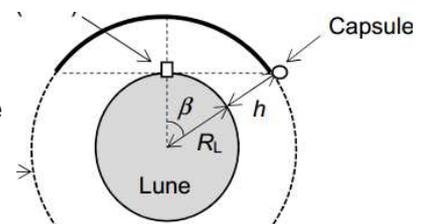
En une durée  $T = 1,99 \text{ h}$  la capsule balaye un angle de  $360^\circ$

En une durée  $T_{\text{COM}}$  elle balaye un angle de  $2 \times 19,9^\circ$

$$\text{Par proportionnalité } T_{\text{COM}} = \frac{1,99 \times 2 \times 19,9}{360} = 0,219 \text{ h} = 789 \text{ s.}$$

*Calcul effectué avec les valeurs non arrondies de  $\beta$  et  $T$ .*

À chaque révolution, la communication n'est possible que pendant 789 s.



Clin d'œil de l'histoire : c'est 100 ans tout juste après la publication de la théorie de la relativité générale d'Einstein, qu'une équipe internationale en a confirmé l'une des prédictions majeures, en réalisant la première détection directe d'ondes gravitationnelles.

**Données :**

- Masse du Soleil :  $M_S = 2,00 \times 10^{30}$  kg ;
- Les ondes gravitationnelles se propagent à la célérité de la lumière dans le vide, soit  $c = 3,00 \times 10^8$  m.s<sup>-1</sup> ;
- Constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup>.kg<sup>-1</sup>.s<sup>-2</sup>.

**1. Les ondes gravitationnelles détectées 100 ans après la prédiction d'Einstein**

Pour la première fois, des scientifiques ont observé des ondes gravitationnelles, produites par la collision de deux trous noirs. Cette découverte confirme une prédiction majeure de la théorie de la relativité générale énoncée par Albert Einstein en 1915. Ces ondes ont été détectées le 14 septembre 2015 par les deux détecteurs jumeaux de LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) situés aux États-Unis à Livingston, en Louisiane, et à Hanford dans l'État de Washington, distants de 3000 km.

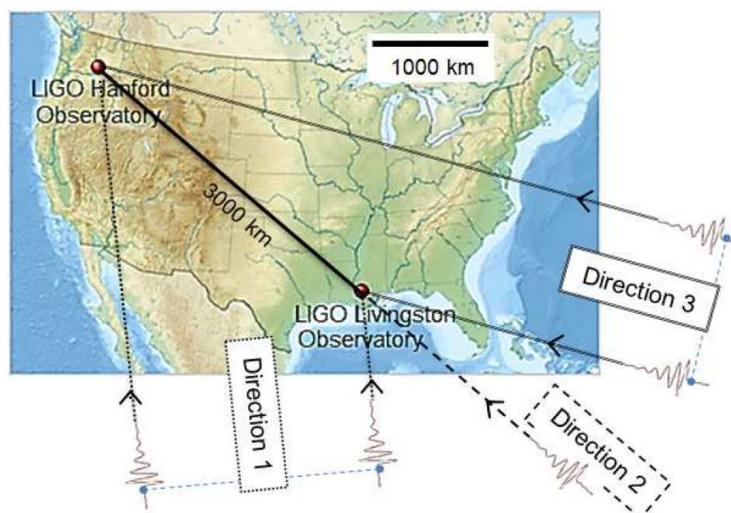
L'analyse des données a permis d'estimer que les deux trous noirs ont fusionné il y a 1,3 milliard d'années et qu'ils avaient des masses d'environ 29 et 36 fois celle du Soleil.

Selon la théorie de la relativité générale, un couple de trous noirs en orbite l'un autour de l'autre perd de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles, ce qui entraîne un rapprochement des deux astres. Ce phénomène peut durer des milliards d'années avant de s'accélérer brusquement. En une fraction de seconde, les deux trous noirs entrent alors en collision et fusionnent en un trou noir unique. Une énergie colossale est alors convertie en ondes gravitationnelles. C'est cette "bouffée" d'ondes qui a été observée.

*D'après le communiqué du CNRS - 11 février 2016*

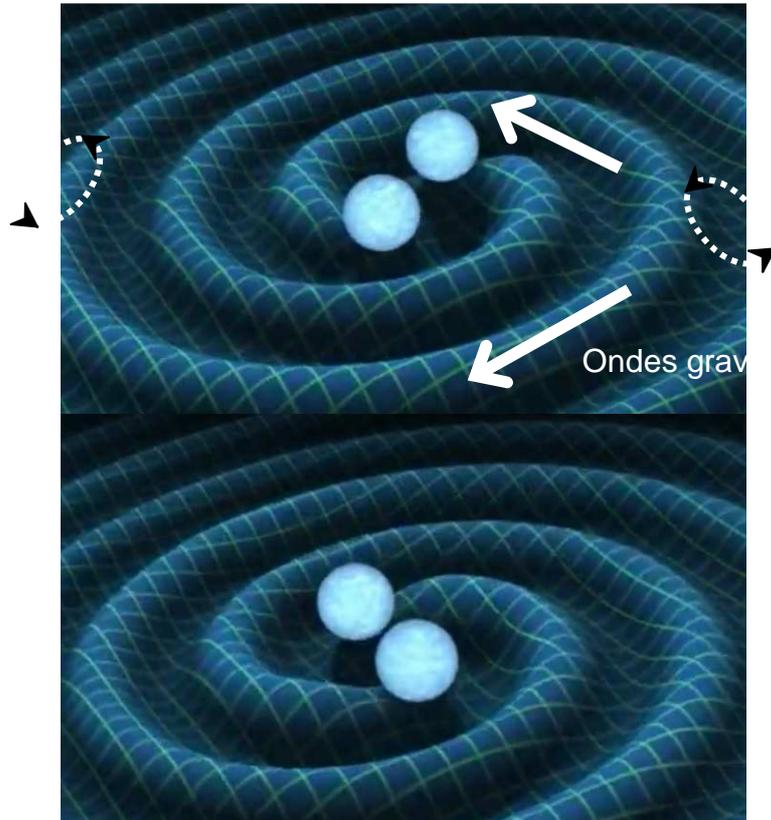
**1.1.** À quelle distance de la Terre, exprimée en année-lumière, se trouve la source des ondes gravitationnelles détectées le 14 septembre 2015 ?

**1.2.** Le détecteur de Livingston a détecté les ondes gravitationnelles 7 ms avant celui de Hanford. Cet écart a permis d'envisager des localisations possibles de leur source.



Observatoires LIGO aux États-Unis ainsi que 3 directions proposées pour la source des ondes gravitationnelles.

- 1.2.a.** Compte tenu de cet écart de détection de 7 ms, expliquer pourquoi les ondes gravitationnelles ne peuvent pas provenir de la direction 2.
- 1.2.b.** Choisir, en justifiant, une direction possible pour leur provenance parmi les deux autres proposées sur la carte ci-dessus.
- 2.** Fusion des deux trous noirs



*Illustration de l'émission d'ondes gravitationnelles lors de la rotation d'un couple de trous noirs de même masse*

*D'après une animation LIGO*

Dans cette partie on fait l'hypothèse que les deux trous noirs ont la même masse. On considère qu'ils sont sur une même orbite circulaire de rayon  $r$  mais diamétralement opposés.

- 2.1.** Schématiser le système des deux trous noirs et représenter sans souci d'échelle la force d'interaction gravitationnelle exercée par l'un des deux trous noirs sur l'autre et donner l'expression de sa valeur en fonction de  $G$ ,  $m$  et  $r$ .

La période des ondes gravitationnelles émises est la demi-période de révolution des trous noirs.

On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne. Le référentiel dans lequel les trous noirs sont en rotation est considéré galiléen. On considère le centre de la trajectoire fixe dans ce référentiel.

**2.2.** Montrer que la vitesse  $v$  des trous noirs peut s'écrire :

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G.m}{r}}$$

**2.3.** En déduire que le rayon de l'orbite est lié à la période de révolution des trous noirs par la relation :

$$r^3 = \frac{G.m}{16.\pi^2} . T^2$$

**2.4.** Comment évolue la fréquence des ondes gravitationnelles émises par les deux trous noirs quand ils se rapprochent pour fusionner ?

L'analyse des données indique que juste avant la fusion des deux astres, ces derniers tournaient l'un autour de l'autre à une cadence d'environ 75 tours par seconde. Les théoriciens tenant compte de la relativité générale estiment alors que la vitesse de chacun est voisine du quart de celle de la lumière.

**2.5.** En considérant deux trous noirs, chacun de masse environ égale à 30 fois la masse du Soleil, montrer que les lois de la mécanique newtonienne donnent une bonne approximation de la vitesse des trous noirs.

**1. Les ondes gravitationnelles détectées 100 après la prédiction d'Einstein**

1.1. Les trous noirs ont fusionné il y a 1,3 milliard d'années, générant la « bouffée » d'ondes qui a été observée. Les ondes gravitationnelles se propagent à la célérité de la lumière. Ainsi la source détectée est située à 1,3 milliard d'années-lumière.

1.2.a. Déterminons la durée  $\Delta t$  du parcours de  $d = 3000$  km entre Livingston et Hanford des ondes suivant la direction 2.

$$c = \frac{d}{\Delta t} \text{ donc } \Delta t = \frac{d}{c}$$

$$\Delta t = \frac{3000 \times 10^3}{3,00 \times 10^8} = 1,00 \times 10^{-2} \text{ s} = 10 \times 10^{-3} \text{ s} = 10 \text{ ms.}$$

Cette durée est supérieure à l'écart mesuré expérimentalement. Les ondes ne peuvent pas provenir de la direction 2.

1.2.b. La durée du parcours étant plus courte en réalité, c'est que la distance parcourue est plus petite que 3000 km. On peut calculer cette distance  $d'$ .

$$d' = c \cdot \Delta t'$$

$$d' = 3,00 \times 10^8 \times 7 \times 10^{-3} = 2,1 \times 10^6 \text{ m} = 2,1 \times 10^3 \text{ km}$$

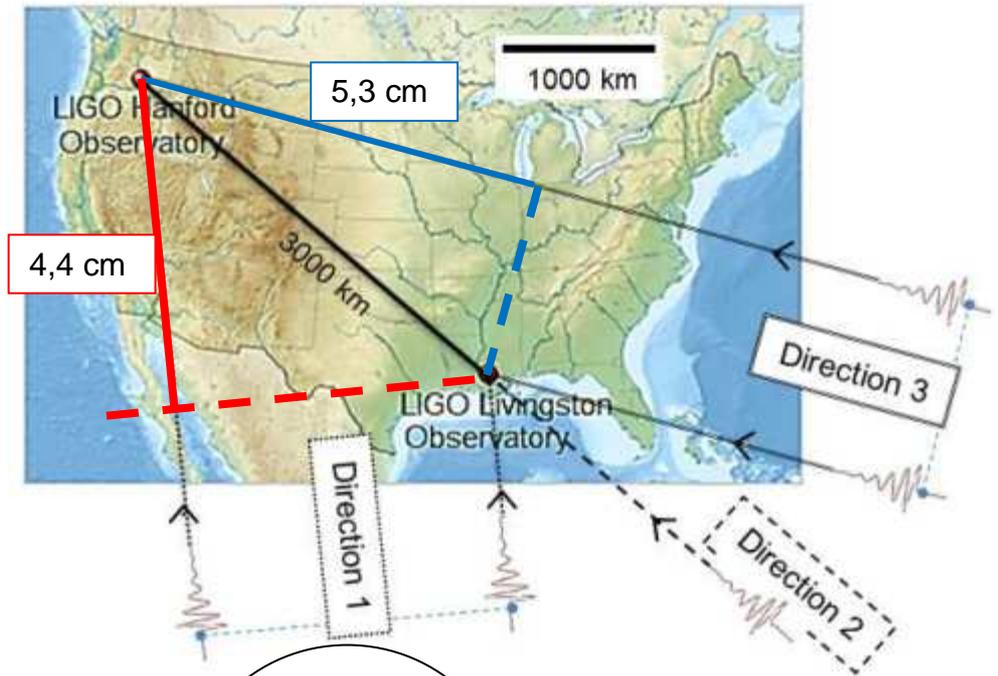
à l'échelle du schéma 1000 km  $\rightarrow$  2,0 cm

2,1  $\times$  10<sup>3</sup> km  $\rightarrow$  L cm

$$L = \frac{2,1 \times 10^3 \times 2,0}{1000} = 4,2 \text{ cm}$$

Seule la direction 1, est en accord avec nos calculs.

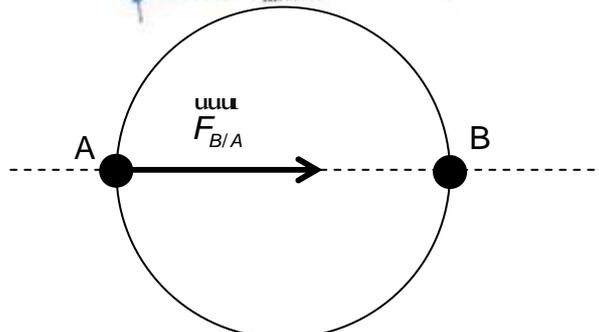
L'écart de 0,2 cm est dû à une imprécision concernant la mesure de L et à un manque de précision sur la valeur de la durée (7ms) donnée avec un seul chiffre significatif.



**2. Fusion des deux trous noirs**

2.1.

$$F_{B/A} = G \cdot \frac{m \cdot m}{(2r)^2} = G \cdot \frac{m^2}{4r^2}$$



**2.2.** On applique la deuxième loi de Newton au système {trou noir A} dans un référentiel lié au centre de gravité des deux trous noirs et considéré galiléen.

Le système n'est soumis qu'à la force d'attraction gravitationnelle exercée par l'autre trou noir :

$$\vec{F}_{B/A} = m \cdot \vec{a}$$

On définit un vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à la trajectoire et centripète.

$$\vec{F}_{B/A} \cdot \vec{n} = m \cdot a$$

$$G \cdot \frac{m^2}{4r^2} \cdot \vec{n} = m \cdot \vec{a} \quad \vec{a} = G \cdot \frac{m}{4r^2} \cdot \vec{n}$$

Par ailleurs, par définition du mouvement circulaire et uniforme, on a  $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$ .

$$\text{Ainsi } \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m}{4r^2}, \quad v^2 = G \cdot \frac{m}{4r} \quad v = \sqrt{G \cdot \frac{m}{4r}} \quad v = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{G \cdot \frac{m}{r}}$$

**2.3.** Le trou noir parcourt sa trajectoire (le périmètre du cercle de rayon  $r$ ) en une durée égale à sa période  $T$ , et ceci à la vitesse  $v$ .

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\text{En égalisant les deux relations } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{G \cdot \frac{m}{r}} = \frac{2\pi \cdot r}{T},$$

$$\text{On élève au carré} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot G \cdot \frac{m}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} \quad \frac{1}{4} \cdot G \cdot \frac{m}{r} \cdot T^2 = 4\pi^2 \cdot r^2$$

$$G \cdot m \cdot T^2 = 16\pi^2 \cdot r^3 \quad r^3 = \frac{G \cdot m \cdot T^2}{16\pi^2} \quad \text{expression (1)}$$

**2.4.** La période des ondes gravitationnelles  $T_{OG}$  est égale à la demi-période de révolution des trous noirs  $T$  :  $T_{OG} = \frac{T}{2}$  ou  $T = 2 \cdot T_{OG}$ .

On remplace  $T$  par cette expression dans l'expression (1) précédente.

$$r^3 = \frac{G \cdot m \cdot (2T_{OG})^2}{16\pi^2} = \frac{G \cdot m \cdot T_{OG}^2}{4\pi^2}$$

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot m \cdot T_{OG}^2$$

$$\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot m} = T_{OG}^2 \quad T_{OG} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m}} \quad f_{OG} = \frac{1}{T_{OG}} \quad f_{OG} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot m}{r^3}}$$

Lorsque les trous noirs se rapprochent alors  $r$  diminue, donc la fréquence des ondes gravitationnelles augmente.

**2.5.** On peut calculer le rayon de la trajectoire avec l'expression (1)  $r^3 = \frac{G \cdot m \cdot T^2}{16\pi^2}$

$$r^3 = \frac{G \cdot 30 \cdot M_S \cdot \left(\frac{1}{f}\right)^2}{16\pi^2} = \frac{G \cdot 15 \cdot M_S}{8\pi^2 \cdot f^2}$$

$$r = \left(\frac{G \cdot 15 \cdot M_S}{8\pi^2 \cdot f^2}\right)^{1/3}$$

Calculator screen showing the calculation of the radius  $r$  using the formula  $r = \left(\frac{G \cdot 15 \cdot M_S}{8\pi^2 \cdot f^2}\right)^{1/3}$ . The input is  $(6.67E-11 * 15 * 2E30 / (8 * \pi^2 * 75^2))^{(1/3)}$  and the result is  $1.651625615E5$ .

$$r = \left( \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 15 \times 2,00 \times 10^{30}}{8 \times \pi^2 \times 75^2} \right)^{1/3}$$

$$r = 1,7 \times 10^5 \text{ m} \quad \text{valeur stockée en mémoire A}$$

On peut alors calculer la vitesse du trou noir :  $v = \frac{1}{2} \sqrt{G \cdot \frac{m}{r}}$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{G \cdot \frac{30 \cdot M_s}{r}}$$

$$v = \frac{1}{2} \times \sqrt{6,67 \times 10^{-11} \times \frac{30 \times 2,00 \times 10^{30}}{1,7 \times 10^5}}$$

$$v = 7,8 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

Calculator display showing the calculation of the velocity v:

$$0.5 * \sqrt{(6.67E-11 * 30 * 2E30 / 1.7E5)}$$

$$7.78310235E7$$

$$\frac{c}{v} = \frac{3,00 \times 10^8}{7,8 \times 10^7} = 3,9 \cong 4$$

Calculator display showing the ratio of the speed of light to the velocity of the black hole:

$$\text{Ans}^{-1} * 3E8$$

$$3.854504111E0$$

Avec la mécanique newtonienne, on retrouve effectivement la prévision des théoriciens qui tiennent compte de la relativité générale : « la vitesse d'un trou noir est voisine de celle du quart de celle de la lumière ».